[14] Lotka Volterra

[BERTHELIN p 197]

On a $(E) : \begin{cases} p' = ap - bpx \\ x' = -cx + dpx \end{cases}$, $a, b, c, d > 0$ csts.

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, $(p_0, x_0) \in [0, +\infty[^2$

On pose $Y = \begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix}$, $f(Y) = \begin{pmatrix} ap - bpx \\ -cx + dpx \end{pmatrix}$ de $(E) \Leftrightarrow Y' = f(Y)$

[1] $\exists !$ solution maxi de (E) pour la cond $(p(t_0), x(t_0)) = (p_0, x_0)$ déf sur $\mathbb{R}$.

f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. ← loc. ($\exists$ sol déf sur un intervalle de $\mathbb{R}$)

Par théorème de Cauchy Lipschitz, $\exists !$ sol max de (E) pr la CI $(p(t_0), x(t_0)) = (p_0, x_0)$

- Si $p_0 = 0$, $x_0 > 0$, alors $(p(t), x(t)) = (0, x_0 e^{-c(t-t_0)})$ sol de (E) sur $\mathbb{R}$ et par unicité, c'est la sol maxi de cond $(0, x_0)$ en t_0.
- Si $p_0 > 0$, $x_0 = 0$, $(p(t), x(t)) = (p_0 e^{a(t-t_0)}, 0)$ sol max sur $\mathbb{R}$ de (E) pr la cond $(p_0, 0)$ en t_0.
- Si $p_0 = 0 = x_0$, $(p(t), x(t)) = (0, 0)$ sol max de (E) sur $\mathbb{R}$ pr la cond $(0,0)$ en t_0.

(Le cas $p_0, x_0 > 0$ sera traité ultérieurement)

[2] Si $p_0, x_0 > 0$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $p(t), x(t) > 0$

Supp $p_0, x_0 > 0$. On note I l'intervalle ouvert d'existence de la sol maxi associé à la cond (p_0, x_0).

<u>Mq $\forall t \in I$, $p(t) > 0$ et $x(t) > 0$.</u>

Si $\exists t \in I$ tq $p(t) \leq 0$, d'après le TVI, $\exists t^* \in I$, $p(t^*) = 0$

Alors $t \mapsto (\tilde{p}(t), \tilde{x}(t)) = (0, x(t^*) e^{-c(t-t^*)})$ est sol de (E) et $(\tilde{p}(t^*), \tilde{x}(t^*)) = (0, x(t^*)) = (p(t^*), x(t^*))$

Par unicité, $\forall t$, $(\tilde{p}(t), \tilde{x}(t)) = (p(t), x(t))$ et en particulier en $t = t_0$: ceci implique $p_0 = 0$ <u>CONT</u>

dc $\forall t \in I$, $p(t) > 0$

De m̂, $\forall t \in I$, $x(t) > 0$.

[3] Dans ce cas, $t \mapsto (p(t), x(t))$ périodique.

On intro sur $]0, +\infty[^2$:

$$H : (p, x) \longmapsto dp + bx - c\ln p - a\ln x$$

ⓐ Mq H est une Int 1ère :

$$\frac{d}{dt} H(p, x) = \left(d - \frac{c}{p}\right)p' + \left(b - \frac{a}{x}\right)x' = \frac{x'}{px}p' - \frac{p'}{px}x' = 0$$

donc pour une CI (p_0, x_0), $p_0, x_0 > 0$, on a $\forall t \in I$:

$$H(p(t), x(t)) = H(p_0, x_0) = C \quad , \text{avec } C \text{ cste.}$$

ⓑ Rquons que $H(p, x) = F_{ab}(x) + F_{cd}(p)$ en posant la fct :

$F_{\gamma,\delta} : u \longmapsto \delta u - \gamma \ln u$

Cette fct a pour d $u \mapsto \delta - \frac{\gamma}{u}$ et on a :

u	0		γ/δ		$+\infty$
$F_{\gamma,\delta}$	$+\infty$	$\searrow$	$F_{\gamma,\delta}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

En particulier, $F_{\gamma\delta}$ est minorée sur $]0, +\infty[$

ⓒ <u>Mq $I = \mathbb{R}$.</u>

Les cas $p_0 = 0$ et $x_0 = 0$ sont traités en [1].

Supp $p_0 > 0$, $x_0 > 0$

Compte tenu des variations de F_{ab}, on a $F_{ab}(x) \geqslant F_{ab}\left(\frac{a}{b}\right)$

donc $H(p, x) = F_{ab}(x) + F_{cd}(p) = C$

$\Rightarrow F_{cd}(p) \leq C - F_{ab}\left(\frac{a}{b}\right)$

or $\lim\limits_{+\infty} F_{cd}(\omega) = \lim\limits_{0} F_{cd}(\omega) = +\infty$

donc $p(t)$ est bornée $\forall t \in I$. ②

② Si p non bornée, alors $\forall M > 0$, $|p(t)| > M$
ie $p(t) \in]-\infty, -M[\cup]M, +\infty[$
or $p(t) > 0$, dc $p(t) \in]M, +\infty[$
dc $\forall M$, $p(t) > M$
dc $p(t) \longrightarrow +\infty$
dc $\lim F_{cd}(p) = +\infty$
or $F_{cd}(p) \leq C - F_{ab}\left(\frac{a}{b}\right) = $ cste
CONT

De m̂ x est bornée sur I.

Le thm des bouts entraine alors que $I = \mathbb{R}$.

ⓓ Les pts stationnaires de (E) sont les (p^*, x^*) tq :

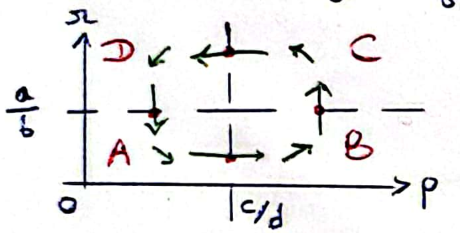
$$\begin{cases} ap^* - bp^*x^* = 0 \\ -cx^* + dp^*x^* = 0 \end{cases} \quad \text{ie} \begin{cases} p^*\left(\frac{a}{b} - x^*\right) = 0 \\ x^*\left(\frac{c}{d} - p^*\right) = 0 \end{cases}$$

Ce sont donc les couples $(0,0)$ et $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$.

Scanné avec CamScanner

ⓒ On va découper le quart du plan $(p>0,\ r>0)$ en 4 :

$$\begin{cases} A = \{(p,t)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq p \leq \frac{c}{d} \text{ et } 0 \leq r \leq \frac{a}{b}\} \\ B = \{(p,t)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \frac{c}{d} \leq p \text{ et } 0 < r < \frac{a}{b}\} \\ C = \{(p,t)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \frac{c}{d} < p \text{ et } \frac{a}{b} \leq r\} \\ D = \{(p,t)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 0 < p \leq \frac{c}{d} \text{ et } \frac{a}{b} < r\} \end{cases}$$



▸ Supp $(p_0, r_0) \in A$. Tant que $(p(t), r(t))$ reste dans A, $p' \geq 0$ et $r' \leq 0$; donc $p \nearrow$ et $r \searrow$ dans A.

Supp que p n'atteigne jamais la valeur $\frac{c}{d}$. Alors comme $p \nearrow$ et majorée, p admet une lim dans A.

r admet aussi une lim ($r \searrow$ et >0) et on a :

$$(p(t), r(t)) \xrightarrow[+\infty]{} (p^*, r^*) \quad \text{où} \begin{cases} 0 < p_0 \leq p^* < c/d \\ 0 \leq r^* \leq r_0 < a/b \end{cases}$$

Alors (p^*, r^*) pt stationnaire de (E) <u>CONT</u>

donc p atteint la valeur c/d.

donc $\exists t_1 > 0$ tq $p(t_1) = c/d$.

▸ Tant que $(p(t), r(t))$ reste ds B, $p', r' \geq 0$ donc $p, r \nearrow$ ds B.

Supp que r n'atteigne jamais a/b. Alors $r \nearrow$ maj ds B donc admet une lim r^*. De plus, $p \nearrow$ dc cv dans $[c/d, +\infty]$.

La lim ne peut pas être $+\infty$ car sinon :

$$C = H(p_0, r_0) = H(p(t), r(t)) = F_{ab}(r(t)) + F_{cd}(p(t)) \xrightarrow[]{} +\infty$$

donc en notant p^* sa lim, $(p,t) \xrightarrow[+\infty]{} (p^*, r^*)$ avec $\frac{c}{d} = p(t_1) < p^*$

et $0 \leq r(t_1) \leq r^* \leq a/b$

dc (p^*, r^*) pt stat de (E) <u>CONT</u> dc $\exists t_2 > t_1$, $r(t_2) = a/b$.

Dans la zone C, $p \searrow, r \nearrow$, $\exists t_3 > t_2$ tq $p(t_3) = c/d$

Dans la zone D, $\exists t_4 > t_3$, $r(t_4) = a/b$

Flt, on revient dans la zone A : $\exists t_5 > t_4$, $p(t_5) = \frac{c}{d}$

▸ Comme $p(t_1) = p(t_5)$ et :

$$\begin{aligned} F_{ab}(r(t_1)) + F_{cd}(p(t_1)) &= H(p(t_1), r(t_1)) = H(p_0, r_0) \\ &= H(p(t_5), r(t_5)) \\ &= F_{ab}(r(t_5)) + F_{cd}(p(t_5)) \end{aligned}$$

on a : $F_{ab}(r(t_1)) = F_{ab}(r(t_5))$

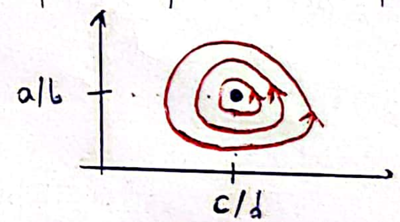
Mais (p_1, r_1) et (p_5, r_5) sont ds A, donc $0 < r_1, r_5 \leq \frac{a}{b}$

Comme F_{ab} strict $\searrow$ sur $]0, a/b]$, on a $r_1 = r_5$

donc on obtient qu'à 2 instants $t_1 \neq t_5$, $(p_1, r_1) = (p_5, r_5)$

donc (p, r) est périodique.

Flt, on peut représenter le portrait de phase de (E) :



Rques ① f $\mathcal{C}^1$ ⇒ f localement lipschitzienne, dc on peut utiliser Cauchy.

Rque : si f est $\mathcal{C}$, on a l'existence par Peano mais pas unicité.

② maxi bornée ⇒ globale

③ <u>Th</u> : y_1, y_2 sol et f localmt lipschitz. en y. Si $y_1 = y_2$ en 1 pt de I, alors $y_1 = y_2$ sur I entier.

④ <u>Th des bouts</u> (démo)

⑤ y sol tq $\lim_{\infty} y(t) = y^*$. Alors y^* pt stationnaire.

Scanné avec CamScanner